Věta: VKM je řádu $p \iff \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$,

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha_i i^l}{l!} = \sum_{i=0}^{k} \beta_i \frac{i^{l-1}}{(l-1)!} \quad \text{pro } l = 1, 2, \dots, p,$$

kde $0^0 = 0! = \frac{0}{0} = 1$

Dk:
$$\tau(x,h) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \underbrace{y(x+ih)}_{\sum_{l=0}^{p} y^{(l)}(x) \frac{(ih)^l}{l!} + O(h^{p+1})} - \sum_{i=0}^{k} \beta_i \underbrace{f(x+ih, y(x+ih))}_{= y'(x+ih)} =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \sum_{l=0}^{p} y^{(l)}(x) \frac{(ih)^l}{l!} - \sum_{i=0}^{k} \beta_i \sum_{l=0}^{p} y^{(l+1)}(x) \frac{(ih)^l}{l!} + O(h^p)$$

Koeficienty u $y^{(l)}(x)$ musí být rovné nule pro $l = 0, \dots, p$

$l = 0$: $\frac{1}{h} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i - 0 = 0$, tj. $\sum \alpha_i = 0$

$l = 1, \dots, p$: $\frac{1}{h} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \frac{(ih)^l}{l!} - \sum_{i=0}^{k} \beta_i \frac{(ih)^{l-1}}{(l-1)!} = 0$, vydělím h^{l-1}

Def: VKM konzistentní: $\lim_{h \to 0+} \tau(x,h) = 0 \quad \forall x$.

Lemma: VKM konzistentní $\iff$ alespoň 1. řádu, tj. $\sum_i \alpha_i = 0$, $\sum_i \alpha_i \cdot i = \sum \beta_i$.

Př: $y_{n+2} - y_n = \frac{1}{3} h \left[f_n + 4 f_{n+1} + f_{n+2} \right]$

α_i	-1	0	1
β_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$

$l = 0$: $\sum \alpha_i = 0 = -1 + 0 + 1 = 0$ ✓

$l = 1$: $\sum \alpha_i i = \sum \beta_i$

$-1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2$, $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ ✓

$l = 2$: $-1 \cdot \frac{0^2}{2!} + 0 \cdot \frac{1^2}{2!} + 1 \cdot \frac{2^2}{2!} = 2$, ... ✓

Řád = 4 (Dahlquist: to je maximum pro 2-krokovou metodu.)

<u>Stabilita</u>: <u>Př</u>: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = -2hf_n$

- 2-krokové metoda, 2. řádu.
- exponenciální nárůst chyby, zhoršuje pro $h \to 0$, lib. malé chyba exponenciálně narůstají, <u>Nestabilita</u>

<u>Modelová rovnice</u>: $y' = 0$, $y(0) = y_0 \Rightarrow$ VKM je tvaru $\underbrace{\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = 0}_{DR}$

hledám posl. $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – lineární rekurence, diferenční rovnice

<u>Př</u>: Fibonacci: $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$.

Přesné řešení $y = \text{konst}$, minimálně chci, že $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ omezená, nejde dolů.

<u>Řešení diferenciální rovnic</u>: Ansatz: hledám řešení ve tvaru $y_n = \xi^n$, $n = 0, 1, \ldots$

dosadím do DR $\Rightarrow$ $0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^{n+i} = \cancel{\xi^n} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^i}_{\rho(\xi)}$

<u>Def</u>: Charakteristický polynom DR: $\rho(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i$

Zobecňujme: <u>Lemma</u>: ξ je kořen $\rho(x) \iff$ posloupnost $\{\xi^n\}_{n=0}^{\infty}$ je řešením DR.

<u>Pozn</u>: DR lineární $\Rightarrow$ $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ řešení DR $\Rightarrow$ $\{ay_n + bz_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je řešení pro $a, b \in \mathbb{R}$.

- ρ má jen <u>jednoduché kořeny</u> (násobnost 1) $\xi_1, \ldots, \xi_k \Rightarrow$ <u>obecné řešení</u>

$$\underline{y_n = a_1 \xi_1^n + a_2 \xi_2^n + \ldots + a_k \xi_k^n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

, jiná řešení nejsou

- konstanty $a_1, \ldots, a_k$ určím předepsáním $y_0, \ldots, y_{k-1}$.

<u>Př</u>: Fibonacci: $\rho(x) = x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, určím konstanty $a, b \Rightarrow a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= a + b = 0 \\ F_1 &= a\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \underline{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Binetova formule

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Metoda vyše: $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0$, $\rho(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow \xi_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right. \Rightarrow$ obecné riešení $y_n = a\cancel{1^n} + b\,3^n$

Pro $y_0 = 0$, $y_1 = \varepsilon$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a + b.\cancel{3^0} = 0 \\ y_1 &= a + b.3^1 = \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2b &= \varepsilon \\ b &= \tfrac{\varepsilon}{2} \\ a &= -\tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_n = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.3^n}$$

1. Požiadavek na stabilitu VKM: $|\xi| \le 1$ $\forall \xi$ - koreň charakteristického polynomu ρ.

Pozn: Pro konzistentní metody: $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0$, tj. $\rho(1) = 0$, tj. $\xi = 1$ je vždy koreň!

Viacnásobné korene:

Lemma: Nech ξ je l-násobný koreň $\rho(x)$. Pak postupnosti

$\{\xi^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{n\xi^{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{n(n-1)\xi^{n-2}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \dots, \{n(n-1)\dots(n-l+2)\xi^{n-l+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$

(celkem l postupností) řeší DR, obecné riešení je lin. kombinace.

Dk: • ξ je 2-násobný koreň $\rho \Rightarrow \xi$ je 2 násobný koreň $\varphi_n(x) = x^n\rho(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{n+i}$

$\longrightarrow \varphi_n(\xi) = 0$ .... $\{\xi^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ řeší DR

$\longrightarrow \varphi_n'(\xi) = 0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \underbrace{(n+i)\xi^{n+i-1}}_{y_{n+i}}$

y_{n+i}, kde $y_n = n\xi^{n-1}$, tj. $\{y_n\}$ řeší DR.

2. požiadavek na stabilitu VKM: ξ je viacnásobný koreň $\rho(x) \Rightarrow |\xi| < 1$

Def: VKM je stabilní, pokud $\forall$ koreň charakt. polynomu $\rho(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i$ platí:

$$\left\langle \begin{array}{l} |\xi| \le 1 \\ |\xi| = 1 \Rightarrow \xi \text{ je jednoduchý.} \end{array} \right.$$

Věta: (Dahlquist) VKM je konvergentní $\Longleftrightarrow$ stabilní & konzistentní

JKM: $y_{n+1} - y_n = \dots$

$$\rho(x) = x - 1 = 0 \quad , \quad \xi = 1.$$

Soustavy rovnic: $\vec{y}(x) = (y_1, \dots, y_N)^T$, $\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x))$

Euler: $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$ – po složkách.